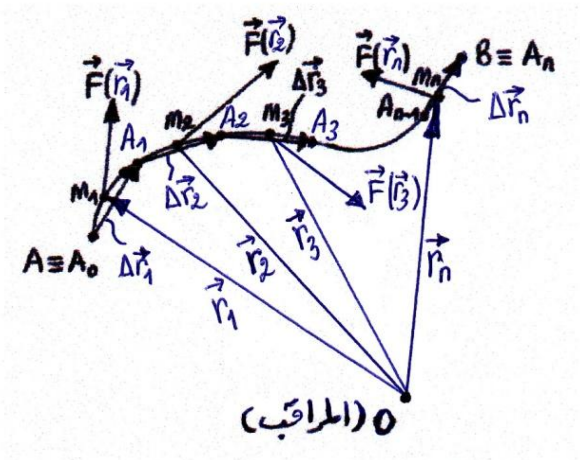
الفصل السادس
العمل و الطاقة

1.6. العمل والطاقة الحركية:

يعرف العمل الذي تنجزه قوة ما $\vec{F}$ عند انتقال نقطة تأثيرها، النقطة M (موضع النقطة المادية)، على طول المنحني (C) المعرف بين النقطتين A و B بالتكامل المنحني (الخطي):



$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_i).\Delta\vec{r}_i$$

حيث $\vec{r}$: شعاع موضع النقطة M من المنحني (C)،
موضع النقطة المادية، و التي هي نقطة تأثير القوة $\vec{F}$،
$\vec{dr}$: شعاع الانتقال على المنحني (C)
و هو مماس له في النقطة M.
$\vec{F}.\vec{dr}$: يسمى العمل العنصري للقوة $\vec{F}$.

ملاحظة: لقد تناولنا في الفصل الثالث الفقرة 4.3.3 التكامل المنحني لدالة شعاعية و بعض خصائصه.

بعد العمل في جملة المقادير "$LMTI\Theta NJ$" المعتمدة عليها الجملة الدولية للوحدات SI: $\dim W = \dim F.\dim l = ML^2T^{-2}$

وحدته في الجملة SI: $[W] = 1N.m = 1J$ (جول)

الاستطاعة هي العمل المنجز في وحدة الزمن و يرمز لها: $P = \dfrac{dW}{dt}$

بعد الاستطاعة في جملة المقادير "$LMTI\Theta NJ$": $\dim P = ML^2T^{-3}$

وحدة الاستطاعة في الجملة SI: $[P] = 1J.s^{-1} = 1W$ (واط)

العمل الذي تنجزه القوة $\vec{F}$ على طول المسار (C) المعرف بين الموضعين A و B: $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr}$

من القانون الثاني لنيوتن: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ حيث $\vec{p} = m\vec{v}$: شعاع كمية الحركة للنقطة المادية

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt}.\vec{dr} = \int_A^B d(m\vec{v}).\frac{\vec{dr}}{dt} = \int_A^B \vec{v}\,d(m\vec{v})$$

حيث m : كتلة النقطة المادية و هو مقدار فيزيائي قيمته ثابتة و بالتالي لا يعتمد على سرعة الجسيم $\vec{v}$ (مفهوم كلاسيكي).

وبالتالي: $W_{AB}(\vec{F}) = m\int_A^B \vec{v}\,d\vec{v}$

لدينا: $\vec{v}.\vec{v} = |\vec{v}||\vec{v}|\cos(\vec{v},\vec{v}) = |\vec{v}|^2 = v^2 \Rightarrow d(\vec{v}.\vec{v}) = d(v^2) \Rightarrow 2\vec{v}.d\vec{v} = 2v\,dv \Rightarrow \vec{v}.d\vec{v} = v\,dv$

العمل الذي تنجزه القوة $\vec{F}$ على طول المسار (C) بين الموضعين A و B حيث سرعة النقطة على الترتيب v_A و v_B

$$W_{AB}(\vec{F}) = m\int_{v_A}^{v_B} v\,dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

العمل المنجز إذن يساوي الفرق بين قيمتين لدالة واحدة من الشكل: $T = \dfrac{1}{2}mv^2 + C = \dfrac{p^2}{2m} + C$.

باعتبار: $T(v=0) = 0 \Rightarrow C = 0$ ، و يمكن بالتالي تعريف دالة الطاقة الحركية لنقطة مادية بالعبارة: $T = \dfrac{1}{2}mv^2$

خلاصة: العمل الذي تنجزه قوة أو مجموعة قوى لانتقال نقطة مادية يساوي التغير في طاقتها الحركية:

$$W_{AB}(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}) = \Delta T = T_B - T_A$$

تعميم:

نستطيع تعميم هذه المفاهيم لمجموعة من النقاط المادية و المتكونة من n نقطة. و يكون العمل المنجز لانتقال النقطة المادية k :

$$(W_{12})_k = (T_2)_k - (T_1)_k$$

العمل المنجز لكل المجموعة:

$$W_{12} = \sum_{k=1}^{n}(W_{12})_k = \sum_{k=1}^{n}[(T_2)_k - (T_1)_k] = \sum_{k=1}^{n}(T_2)_k - \sum_{k=1}^{n}(T_1)_k = T_2 - T_1$$

الطاقة الحركية لمجموعة من النقاط المادية تساوي مجموع الطاقات الحركية للنقاط المادية المكونة لها: $T = \sum_{k=1}^{n} T_k$ وعبارة W_{12}

تمثل مجموع أعمال كل القوى الداخلية و الخارجية المؤثرة على نقاط المجموعة: $W_{12} = \sum_{k=1}^{n} W_{12}(\vec{F}_k^{ex}) + \sum_{k=1}^{n} W_{12}(\vec{F}_k^{in}) = T_2 - T_1$

حيث 1 و 2 : تمثل وضعين لمجموعة النقاط المادية.

ملاحظة: تغير كمية حركة مجموعة من النقاط المادية هو نتيجة لتأثير القوى الخارجية المؤثرة على هذه المجموعة:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n}\vec{p}_k \quad ، \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{ex}$$

2.6. تصنيف القوى من الناحية الطاقوية:

1.2.6. القوى الجهدية و الطاقة الكامنة:

القوة المؤثرة على نقطة مادية تدعى جهدية إذا كانت دالة لموضع نقطة تأثيرها (أي موضع النقطة المادية) و الزمن و تحقق معادلة الدوران:

- $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$
- $rot\vec{F} = \vec{0}$

انطلاقا من العلاقة الشعاعية التالية: $rot\,\overrightarrow{grad f} = \vec{0}$ ، حيث f دالة سلمية، يمكن اشتقاق الدالة الشعاعية $\vec{F}$ من دالة سلمية $U(\vec{r},t)$ تدعى دالة الطاقة الكامنة للنقطة المادية: $\vec{F} = -\overrightarrow{gradU}(\vec{r},t)$

تنقسم القوى الجهدية إلى قسمين:

- قوى جهدية غير مستقرة زمنيا: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r},t)$ ، $U = U(\vec{r},t)$ $\left(\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0\right)$
- قوى جهدية مستقرة زمنيا: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ، $U = U(\vec{r})$ $\left(\frac{\partial U}{\partial t} = 0\right)$

التغير الزمني لدالة الطاقة الكامنة $U = U(x, y, z, t)$:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \overrightarrow{gradU}.\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$dU = \overrightarrow{gradU}.d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt$$

حيث: $\overrightarrow{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ ، $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

عبارة العمل العنصري: $dW = \vec{F}.d\vec{r} = -\overrightarrow{gradU}.d\vec{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}dt$

$$\boxed{dW = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}dt}$$

❖ القوى الجهدية غير المستقرة زمنيا(غير المحافظة):

$$\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow dW \neq -dU$$

عمل القوى الجهدية غير المحافظة لا يساوي الفرق بين قيمتي الطاقة الكامنة في موضعين مختلفين بل يضاف لهذا الفرق حد يعتمد على مسار النقطة المادية.

مثال: القوة المؤثرة على شحنة كهربائية من قبل حقل كهربائي متناوب في الاتجاه x :

$$E_x = E_0 \cos \omega t \Rightarrow F_x = qE_x = qE_0 \cos \omega t$$

عبارة الطاقة الكامنة:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{gradU} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -F_x = -qE_0 \cos \omega t \Rightarrow U = -(qE_0 \cos \omega t)x + C(y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow C = C(z) \Rightarrow U = -(qE_0 \cos \omega t)x + C(z) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \Rightarrow C = cte \Rightarrow U = -(qE_0 \cos \omega t)x + C \end{cases}$$

نتيجة: $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$

❖ القوى الجهدية المستقرة (المحافظة):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow dW = -dU = dT$$

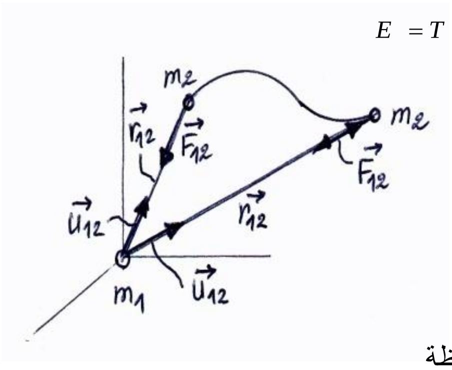
العمل المنجز يساوي الفرق بين قيمتي الطاقة الكامنة في موضعين مختلفين و تنجزه قوى تدعى القوى المحافظة.

العمل المنجز بين موضعين A و B :

$$W_{AB} = T_B - T_A = U_A - U_B \Rightarrow T_A + U_A = T_B + U_B = cte$$

نحصل في هذه الحالة على لا متغير فيزيائي للقوى المحافظة و هو الكمية: $T + U$ ، وبذلك يمكننا إدخال مفهوم جديد المعرف بمجموع الطاقات الحركية و الكامنة و نطلق عليه الطاقة الكلية E للنقطة المادية: $E = T + U$

أمثلة على الحقول الجهدية المحافظة:



الحقل الثقالي: الجسيم m_2 واقع في الحقل الثقالي للجسيم m_1 و بالتالي تؤثر عليه القوة:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}) \\ \overrightarrow{rot}\vec{F}_{12} = \vec{0} \end{cases} \Leftarrow$$ القوة $\vec{F}_{12}$: جهدية محافظة

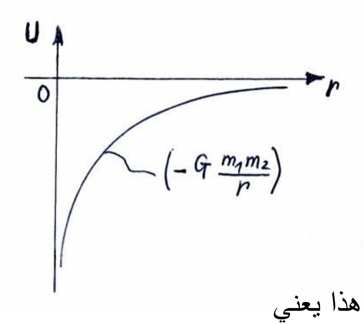
باعتبار المرجع العطالي مرتبط بالكتلة m_1 و يمكن كتابة $r_{12} = r$ ، $\vec{u}_{12} = \vec{u}_r$:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{gradU} = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\right) = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow U = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C(\theta,\varphi) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow C = C(\varphi) \Rightarrow U = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C(\varphi) \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial C}{\partial \varphi} = \frac{dC}{d\varphi} = 0 \Rightarrow C(\varphi) = C(cte) \Rightarrow U = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C \end{cases}$$

عبارة دالة الطاقة الكامنة في الحقل الثقالي عند أخذها معدومة في غياب التأثير المتبادل (التباعد إلى ما لا نهاية)

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \quad ، \quad U(\infty) = 0$$



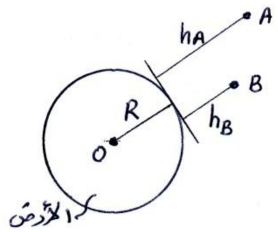
$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \rightarrow$ الحقل الثقالي جهدي محافظ $\leftarrow dT = -dU$

و الطاقة الكلية محفوظة (ثابتة) للكتلة m_2: $E = T + U = \frac{1}{2}m_2 v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = E_0(cte)$

<u>حالة خاصة</u>: الطاقة الكامنة في جوار الأرض.

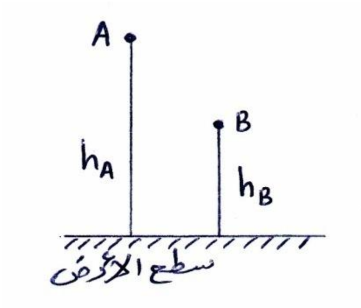
الطاقة الكامنة لكتلة نقطية في الحقل الثقالي للكرة الأرضية (اعتبار الكرة الأرضية كتلة نقطية: هذا يعني أنه انطلاقا من اعتبار الأرض كروية الشكل و توزيع الكتلة فيها ذو تناظر كروي، يمكن اعتبار الحقل الثقالي للأرض مماثل للحقل الثقالي لنقطة مادية متواجدة في مركز الأرض و كتلتها كتلة الأرض): $U = -G\frac{m_t m}{r} + C$ ، m_t: كتلة الأرض

الفرق في الطاقات الكامنة بين الموضعين A و B:



$$U_A - U_B = -G\frac{m_t m}{r_A} + G\frac{m_t m}{r_B} + C - C \quad ، \quad \text{حيث: } r_A = R + h_A$$

$$U_A - U_B = G m_t m\left[\frac{R + h_A - R - h_B}{R^2 + R(h_A + h_B) + h_A h_B}\right]$$



بما أن: $h_A \ll R$ ، $h_B \ll R$ فإن: $R^2 + R(h_A + h_B) + h_A h_B \simeq R^2$

$$U_A - U_B = G\frac{m_t m}{R^2}(h_A - h_B) = (G\frac{m_t}{R^2})m h_A - (G\frac{m_t}{R^2})m h_B = m g_0 h_A - m g_0 h_B$$

حيث: $g_0 = G\frac{m_t}{R^2}$ شدة الحقل الثقالي قريبا من سطح الأرض.

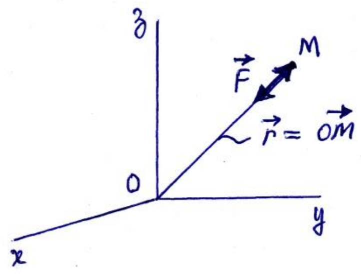
يمكن إذن تعريف دالة الطاقة الكامنة في جوار الكرة الأرضية:

$$U = m g_0 h \quad ، \quad U(h = 0) = 0$$

<u>حقل قوة مرنة:</u>

تخضع النقطة المادية كتلتها m لتأثير القوة $\vec{F}$ عباراتها من الشكل:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \quad ، \quad k \rangle 0$$



النموذج الميكانيكي لهذه القوة يتمثل في نابض ثابت مرونته k

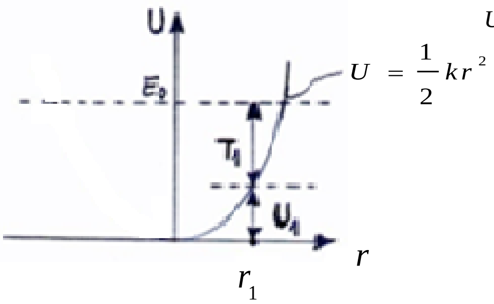
(النابض يعمل في المنطقة المرنة)

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \\ \overrightarrow{rotF} = \vec{0} \end{cases} \Leftarrow \vec{F} = -k\vec{r} \text{ جهدية محافظة}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{gradU} = -(\frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi) = -k\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = kr \Rightarrow U = \frac{1}{2}kr^2 + C(\theta,\varphi) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow C = C(\varphi) \Rightarrow U = \frac{1}{2}kr^2 + C(\varphi) \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial C}{\partial \varphi} = \frac{dC}{d\varphi} = 0 \Rightarrow C(\varphi) = C(cte) \Rightarrow U = \frac{1}{2}kr^2 + C \end{cases}$$

عبارة دالة الطاقة الكامنة في حقل قوة مرنة من الشكل $\vec{F} = -k\vec{r}$ عند أخذها معدومة في الموضع $r = 0$:



$$U = \frac{1}{2}kr^2 \quad ، \quad U(r=0) = 0$$

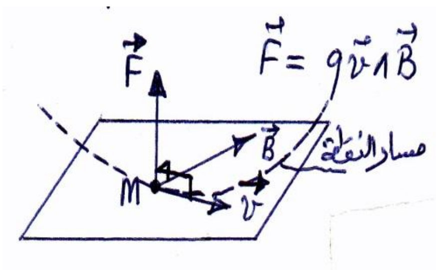
الطاقة الكلية محفوظة :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kr_0^2 = E_0$$

حيث: E_0. الطاقة الكلية وهي ثابتة و تحدد من الشروط الإبتدائية $(r_0 ، v_0)$ (الشكل).

2.2.6. القوى الجيروسكوبية:

تسمى القوة التي تعتمد قيمتها خطيا وطرديا على قيمة سرعة النقطة المادية المؤثرة عليها و التي تتجه عموديا على اتجاه السرعة بالقوة الجيروسكوبية $\vec{F}_g$. يمكن التعبير عن هذه القوة بالعبارة الشعاعية: $\vec{F}_g = \alpha\vec{v} \wedge \vec{A}$ التي تعتمد على سرعة النقطة المادية و بالتالي فالقوة الجيروسكوبية غير جهدية أي لا يمكن اشتقاقها من دالة سلمية.



عمل القوة الجيروسكوبية دائما معدوم

$$dW(\vec{F}_g) = \vec{F}_g.d\vec{r} = (\alpha\vec{v} \wedge \vec{A}).d\vec{r} = (\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{A}).d\vec{r} = \alpha(d\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}).\vec{A} = 0$$

<u>مثال على القوى الجيروسكوبية:</u> قوة لورنتز وهي القوة المؤثرة على شحنة q متحركة بسرعة $\vec{v}$ داخل حقل ميغناطيسي شعاع شدته B وعبارتها: $\vec{F}_g = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

3.2.6. القوى المبددة:

القوى المبددة تتجه عكس اتجاه السرعة $\vec{v}$ بالنسبة إلى الوسط المتحرك فيه الجسيم: $\vec{F}_d = -kv^{\alpha}\vec{v}$ حيث α ، k ثابتان موجبان.

استطاعة القوة المبددة:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}_d.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_d.\vec{v} = -kv^{\alpha}\vec{v}.\vec{v} = -kv^{\alpha+2} \quad ، \quad \alpha + 2 \rangle 0$$

$$\alpha + 2 \rangle 0 \Rightarrow \frac{dW}{dt} \langle 0$$

القوى المبددة تقلل من الطاقة الكلية للنقطة المادية.

4.2.6. الحالة العامة:

تؤثر على الجسيم قوى جهدية، جيروسكوبية و مبددة محصلتها تبعا لمبدأ التراكب

$$\vec{F} = -\overrightarrow{gradU} + \vec{F}_g + \vec{F}_d$$

استطاعة كل من:

- القوى الجهدية: $$dW_p = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}dt \Rightarrow \frac{dW_p}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}$$
- القوى الجيروسكوبية: $$dW_g = 0 \Rightarrow \frac{dW_g}{dt} = 0$$
- القوى المبددة: $$\frac{dW_d}{dt} = \vec{F}_d.\vec{v}$$

مجموع الإستطاعات:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_p}{dt} + \frac{dW_g}{dt} + \frac{dW_d}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}_d.\vec{v}$$

الطاقة الكلية:

$$E = T + U$$

التغير الزمني للطاقة الكلية:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dU}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}_d.\vec{v} + \frac{dU}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}_d.\vec{v}}$$

التغير الزمني للطاقة الكلية للجسيم مشروط باعتماد القوى على الزمن بشكل صريح (وجود قوى جهدية غير مستقرة) و بوجود قوى مبددة. أما القوى الجيروسكوبية فلا تغير الطاقة الكلية.

<u>حالة خاصة:</u> اذا انعدمت القوى المبددة و كانت كل القوى جهدية مستقرة (محافظة)، فان الطاقة الكلية E محفوظة:

$$E = T + U = E_0(cte)$$

قانون حفظ الطاقة الكلية يسمح بتحديد السرعة كدالة لموضع الجسيم من دون حل معادلات الحركة

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = E_0 \Rightarrow v(r)$$

3.6. الحركة المركزية:

1.3.6. التعريف:

القوة المركزية هي التي تؤثر على جسيم ما بحيث تتجه دائما نحو نقطة ثابتة تسمى مركز الحقل المركزي (منبع الحقل) و تعتمد قيمتها على المسافة r فقط عن مركز الحقل أي من الشكل: $\vec{F} = f(r)\vec{u}_r$ ،

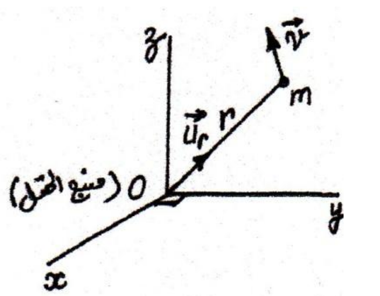
حيث:

$f(r)$: دالة للمسافة r ،

$\vec{u}_r$: شعاع وحدة متجه من منبع الحقل إلى موضع الجسيم.

إذا كان $f(r) > 0$: القوة دافعة عن منبع الحقل.

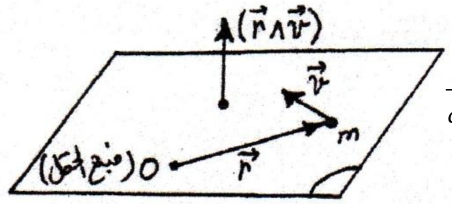
إذا كان $f(r) < 0$: القوة جاذبة نحو منبع الحقل.



2.3.6. الخصائص:

❖ مسار الجسيم في الحقل المركزي(تحت تأثير قوة مركزية) مستو، بمعنى الحركة مستوية، و منه شعاع الموضع $\vec{r}$ و شعاع السرعة $\vec{v}$ للجسيم يقعان دائما في مستوى واحد ثابت في المرجع المرتبط بمنبع الحقل و يعين بالجداء الشعاعي $\vec{r} \wedge \vec{v}$ حيث $(\vec{r}_0 ، \vec{v}_0)$ تمثل الشروط الإبتدائية لحركة الجسيم.

<u>البرهان:</u>



$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{r} \wedge \vec{a}$$

من المبدأ الثاني لنيوتن: $\vec{F} = m\vec{a}$

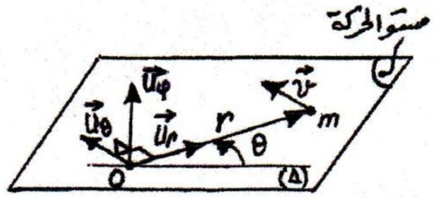
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{r} \wedge \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}[\vec{r} \wedge f(r)\vec{u}_r] = \frac{1}{m}[r\vec{u}_r \wedge f(r)\vec{u}_r] = \frac{1}{m}rf(r)[\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r] = \vec{0}$$

❖ عزم كمية الحركة للجسيم محفوظ.

من المبدأ الثاني لنيوتن:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\mu}_0(\vec{F}) \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge f(r)\vec{u}_r = r\vec{u}_r \wedge f(r)\vec{u}_r = rf(r)[\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r] = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{C} \text{ (شعاع ثابت)}$$

بما أن الحركة مستوية، نختار معلما فضائيا مرتبط بمستو الحركة و نستعمل النظام القطبي للإحداثيات (r,θ) لوصف الحركة في هذا المستوي.



إذن:

$$\vec{L}_0 = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) = m\begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ v_r & v_\theta & 0 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{L}_0 = \vec{C} \Rightarrow r^2\dot{\theta}\vec{u}_\varphi = \vec{C} \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{(ثابت)}$$

3.3.6. معادلات الحركة:

تبعا للمبدأ الثاني لنيوتن:
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(r)\vec{u}_r$$

$$m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta\right] = f(r)\vec{u}_r \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

حل هاتين المعادلتين التفاضليتين يعطي معادلة المسار المستوي للجسيم في الحقل المركزي على الشكل $r = r(\theta)$.

4.3.6. دراسة الحركة المركزية طبقا لقانون حفظ الطاقة الميكانكية:

إحداثيات شعاع القوة المركزية في الأساس الكروي $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$:

$$\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_\varphi\vec{u}_\varphi = f(r)\vec{u}_r \Leftrightarrow \begin{cases} F_r = f(r) \\ F_\theta = 0 \\ F_\varphi = 0 \end{cases}$$

لدينا عبارة $\overrightarrow{rot}\vec{F}$ في الأساس الكروي:

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\vec{u}_\varphi$$

بالتعويض نجد: $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$

إذن:

$$\left.\begin{matrix} \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \\ \overrightarrow{rot}\vec{F} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{F} = f(r)\vec{u}_r \quad \text{(جهدية محافظة)} \quad \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + U = \quad \text{ثابت}$$

خلاصة: للجسيم الواقع في حقل مركزي:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

حيث:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow |\vec{v}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r)$$

$L_0 = mr^2\dot{\theta} =$ ثابت : قيمة العزم الحركي للجسيم في الحقل المركزي محفوظ.

نضع الكمية: $\frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r) = U_{eff}$ و نسميها الطاقة الكامنة الفعالة.

و نحصل على: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}$

هذه العبارة تعطينا تصورا لحركة الجسيم و كأنها تتم على محور واحد مستقيم هو r و هو في حقل مركزي بحيث تكون طاقته الكامنة فيه مساوية إلى الطاقة الكامنة الفعالة U_{eff}.

على أساس المنحنى $U_{eff}(r)$ و قانون حفظ الطاقة الكلية E يمكن دراسة حركة الجسيم دون معرفة قانونها و خصوصا من الناحيتين:

- حدود الحركة المركزية: المنطقة المسموح بها للجسيم أن يحتلها هي التي تحقق الشرط:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff} \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{eff} \geq 0 \Rightarrow E \geq U_{eff}$$

- مرور الجسيم بمركز القوة المركزية: يمكن للجسيم المرور بمركز القوة عندما يتحقق الشرط التالي: $E \geq (U_{eff})_{r\to 0}$

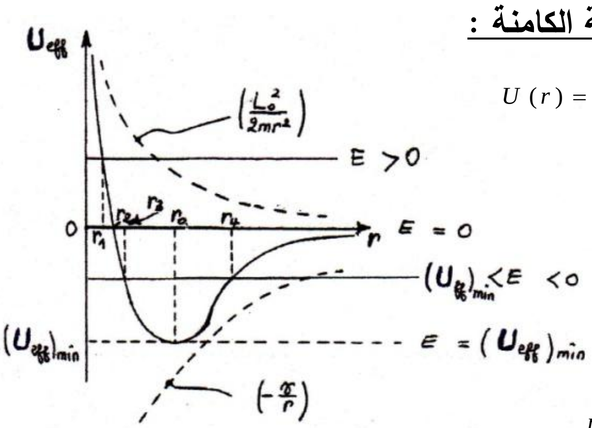
أو: $(r^2U(r) + \frac{L_0^2}{2m} \leq r^2E)_{r\to 0}$

هذا الشرط يتحقق في حالة الطاقة الكامنة $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ عندما:

$$n = 2 \text{ بشرط } \alpha \geq \frac{L_0^2}{2m}$$

$$n \rangle 2 \text{ بشرط } \alpha \rangle 0$$

4.3.6. مثال على تحليل الحركة على أساس منحنى الطاقة الكامنة :



جسيم واقع في الحقل الثقالي الجاذب حيث عبارة طاقته الكامنة: $U(r) = -\frac{\gamma}{r}$

عبارة الطاقة الكامنة الفعالة: $U_{eff} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L_0^2}{2mr^2}$

$$r_0 = \frac{L_0^2}{m\gamma} \quad ، \quad (U_{eff})_{\min} = -\frac{m\gamma^2}{2L_0^2}$$

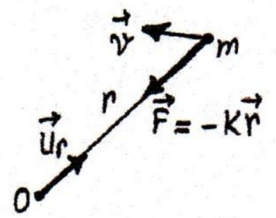
$$r_0 = \frac{L_0^2}{m\gamma} \quad ، (U_{eff})_{\min} = -\frac{m\gamma^2}{2L_0^2}$$

- $E \rangle 0$: لا يبقى الجسيم على مسافة محدودة و تتم الحركة في المجال $r_1 \leq r \langle \infty$ (المسار غير محدود و هو عبارة عن قطع زائد أو قطع مكافئ).
- $E = 0$: الحركة غير محدودة و تتم في الحيز $r_2 \langle r \langle \infty$ (قطع زائد أو قطع مكافئ).
- $(U_{eff})_{\min} \langle E \langle 0$: الحركة محدودة و تتم في الحيز الفضائي $r_3 \leq r \leq r_4$ (المسار عبارة عن قطع ناقص).
- $E = (U_{eff})_{\min}$: الحركة تتم على مسافة $r = r_0$ (المسار عبارة عن دائرة نصف قطرها r_0).

في كل الحالات لا يمكن للجسيم المرور بمركز القوة "O".

4.6. المتذبذب الفضائي (الحركة التوافقية البسيطة):

1.4.6. معادلات الحركة:



تدعى النقطة المادية الواقعة في الحقل المركزي، حيث عبارة القوة فيه تأخذ الشكل:

$\vec{F} = -kr\vec{u}_r$ ، $k =$ ثابت موجب ،

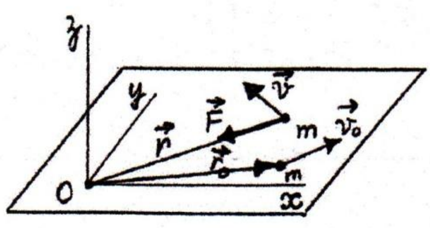
بالمتذبذب الفضائي، و تسمى حركتها بالحركة التوافقية البسيطة.

باعتبار الحركة في الحقل المركزي مستوية، نختار هذا المستوي المحدد بالشروط الإبتدائية للحركة و هي ثبوت الطاقة الكلية $E = E_0$ و شعاع عزم كمية الحركة $\vec{L}_0$ كما جاء في الوصف الطاقوي للحركة المركزية، و معناه حركيا السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ و شعاع الموضع الابتدائي $\vec{r}_0$:

$$\vec{L}_0 = mr_0^2\dot{\theta}_0^2\vec{k} \quad ، \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(\vec{r}_0) = E_0$$

المحاور Ox و Oy يقعان في هذا المستوي و Oz عمودي عليه.

نكتب المبدأ الثاني لنيوتن في المرجع $Oxyz$ باعتباره عطاليا:



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = -k\vec{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{r} = \vec{0}$$

بوضع $\omega^2 = \frac{k}{m}$: ثابت موجب و بإسقاط المعادلة الشعاعية على المحاور:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{k}{m}\vec{r}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0\end{cases}$$

الحلول العامة للمعادلتين المتشابهتين تأخذ الشكل:

$$x(t)=C_1e^{i\omega t}+D_1e^{-i\omega t}\quad ، \quad y(t)=C_2e^{i\omega t}+D_2e^{-i\omega t}$$

و حلولها الحقيقية تأخذ الشكل:

$$x(t)=A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t\quad ، \quad y(t)=A_2\cos\omega t+B_2\sin\omega t$$

الحل العام للمعادلة الشعاعية:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{k}{m}\vec{r}=\vec{0}$$

من الشكل: $\vec{r}(t)=\vec{A}\cos\omega t+\vec{B}\sin\omega t$

$\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعان ثابتان يعينان من الشروط الابتدائية للحركة.

شعاع الموضع الإبتدائي للجسيم: $\vec{r}(t=0)=\vec{r}_0=\vec{A}$

شعاع السرعة الابتدائية للجسيم: $\vec{v}(t=0)=\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=0}=(-\omega\vec{A}\sin\omega t+\omega\vec{B}\cos\omega t)_{t=0}=\vec{v}_0=\omega\vec{B}\Rightarrow\vec{B}=\dfrac{\vec{v}_0}{\omega}$

الحركة التوافقية البسيطة دورية و دورها: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ و لا يعتمد على الشروط الإبتدائية.

لايجاد معادلة المسار نختار المحورين Ox و Oy بحيث:

$$Ox\equiv\vec{r}_0=\vec{r}(t=0)\to\vec{A}(A,0)\quad ، \quad Oy\equiv\vec{v}_0=\vec{v}(t=0)\to\vec{B}(B,0)$$

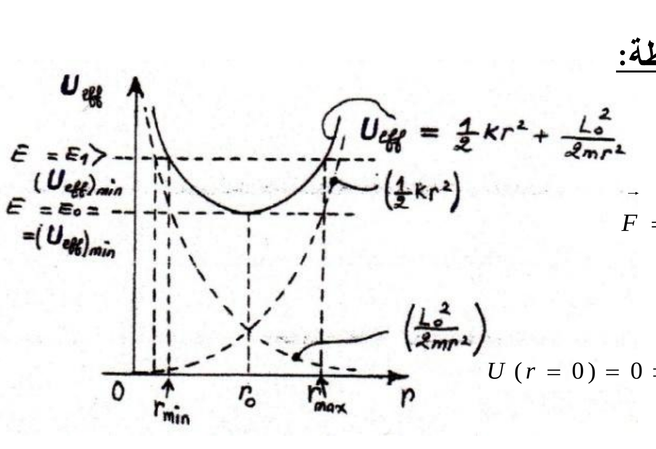
حيث:

A : البعد الابتدائي للنقطة عن المنبع، ωB : السرعة الابتدائية للجسيم.

$$\vec{r}(t)=\vec{A}\cos\omega t+\vec{B}\sin\omega t\Leftrightarrow\begin{cases}x(t)=A\cos\omega t\\ y(t)=B\sin\omega t\end{cases}$$

معادلة المسار عبارة عن قطع ناقص: $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$

1.4.6. الوصف الطاقوي للحركة التوافقية البسيطة:



تحقق القوة $\vec{F}=-k\vec{r}$: $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$ و $\vec{rot}\vec{F}=\vec{0}$

و بالتالي فهي جهدية محافظة (قوة مركزية): $\vec{F}=f(r)\vec{u}_r=-kr\vec{u}_r$

إذن: $U(r)=-\int f(r)dr=-\int -krdr=\dfrac{1}{2}kr^2+c$

$$U(r=0)=0\Rightarrow c=0\Rightarrow U(r)=\frac{1}{2}kr^2$$

و تكون حدود الحركة للمتذبذب الفضائي: $E\geq U_{eff}$

- حالة: $E=E_1\rangle(U_{eff})_{min}$ ← الحركة محدودة وتتم في المجال $r_{min}\leq r\leq r_{max}$

و من المعادلة: $E_1=U_{eff}=\dfrac{1}{2}kr^2+\dfrac{L_0^2}{2mr^2}$ ، نحصل على: $E_1=U_{eff}=\dfrac{1}{2}kr^2+\dfrac{L_0^2}{2mr^2}$

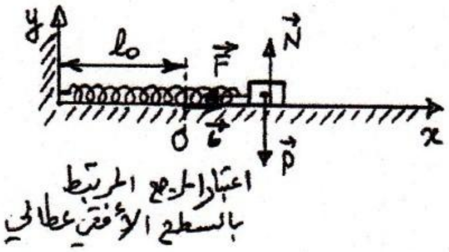
و عليه يكون مسار الجسيم عبارة عن قطع ناقص مركزه ينطبق على مركز القوة و يمس مرتين الدائرتين اللتين نصفا قطراهما r_{min}، r_{max}.

- حالة: $E = E_0 = (U_{eff})_{min}$، حيث $U_{eff} = \sqrt{\frac{k}{m}} L_0$ ← الحركة محدودة و مسار الجسيم عبارة عن دائرة نصف قطرها $r_0 = \sqrt{\frac{E_0}{m}}$.

1.4.6. أمثلة عن الحركة التوافقية البسيطة:

1. جسيم خاضع لتأثير نابض (بإهمال الاحتكاك الصلب للجسم مع السطح الأفقي و مقاومة الوسط المحيط):

المعادلة الأساسية للتحريك في المرجع المرتبط بالسطح الأفقي باعتباره عطاليا:



$$m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = -kx\vec{i} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

بوضع: $\omega^2 = \frac{k}{m}$

نحصل على المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

و تبعا لشكل هذه المعادلة تكون حركة الجسيم توافقية بسيطة، دورها: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

و قانونها: $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

نأخذ كمثال اول للشروط الإبتدائية حيث يسحب الجسيم إلى مسافة من وضع التوازن و يترك:

$$x(t=0) = x_0 = A$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0 = 0 \Rightarrow \left[\frac{d}{dt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\right]_{t=0} = \omega B \Rightarrow B = 0$$

و يصبح قانون الحركة: $x(t) = x_0\cos\omega t = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

و كمثال ثاني للشروط الابتدائية حيث يدفع الجسيم من وضع التوازن ليكتسب سرعة ابتدائية:

$$x(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0 = \omega B \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$$

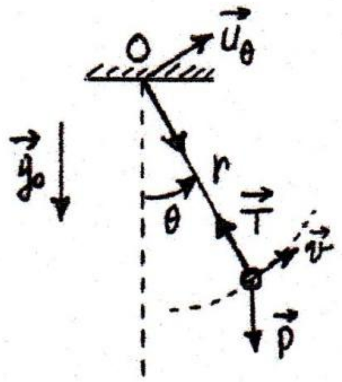
و يصبح قانون الحركة: $x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

2. النواس البسيط:

نربط كرية صغيرة باعتبارها كتلة نقطية m بنهاية خيط طوله l و طرفه العلوي مثبت. نزيح الكتلة عن موضع توازنها حتى يصنع الخيط زاوية α مع الشاقول ثم نتركها لتتذبذب في مستو رأسي بين موضعين $\theta = \alpha$ و $\theta = -\alpha$ (اعتبار الحقل الثقالي للكرة الأرضية شدته g_0 متجانس في الحيز الفضائي الذي تتحرك فيه الكرية ، إهمال مقاومة الوسط).

المعادلة الأساسية للتحريك في المرجع المرتبط بنقطة التعليق باعتباره عطاليا:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{T}$$



حيث القوى المؤثرة على الكرية هي: $\vec{P} = m\vec{g}_0$ ، $\vec{T}$

تتم الحركة في المستوي المعين بالشروط الابتدائية للحركة $(\vec{r}_0 ، \vec{v}_0)$،

حيث $\vec{r}_0$: شعاع الموضع الابتدائي و $\vec{v}_0$: شعاع السرعة الابتدائية.

بالتالي يمكن وصف حركة الكرية في هذا المستوي باستعمال نظام الإحداثيات القطبي $(r ، \theta)$.

بكتابة المعادلة الاساسية للتحريك في الأساس القطبي $(\vec{u}_r ، \vec{u}_\theta)$:

$$m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta\right] = (P\cos\theta - T)\vec{u}_r - P\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

حيث: $r = l =$ ثابت (الخيط غير قابل للأستطالة) $\Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

و تصبح المعادلة الأساسية للتحريك:

$$ml\dot{\theta}^2\vec{u}_r + ml\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = (P\cos\theta - T)\vec{u}_r - P\sin\theta\,\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} ml\dot{\theta}^2 = P\cos\theta - T \\ ml\ddot{\theta} = -P\sin\theta \end{cases}$$

من المعادلة الثانية للجملة:

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g_0}{l}\sin\theta$$

للذبذبات الصغيرة: $\sin\theta \approx \theta$

تأخذ المعادلة التفاضلية الشكل التالي: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g_0}{l}\theta = -\omega^2\theta$ ، حيث : $\omega^2 = \frac{g_0}{l}$

حلها العام: $\theta(t) = \theta_1\cos\omega t + \theta_2\sin\omega t$

باعتبار الشروط الابتدائية: $\theta(t=0) = \alpha \Rightarrow \theta_1 = \alpha$

$$\vec{v}(t=0) = \vec{0} \Rightarrow \left[(r\dot{\theta})\right]_{t=0} = \left[r(-\omega\theta_1\sin\omega t + \omega\theta_2\cos\omega t)\right]_{t=0}$$

$$= \left[l(-\omega\theta_1\sin\omega t + \omega\theta_2\cos\omega t)\right]_{t=0} = \omega\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 0$$

نحصل في الأخير على المعادلة الواصفة لحركة الكرية، و بالتالي يتحدد موضعها في كل لحظة بالإحداثيات القطبية:

$$M\begin{cases} r = l \\ \theta(t) = \alpha\cos\sqrt{\frac{g_0}{l}}t \end{cases}$$

و حركتها توافقية بسيطة، دورها: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$.