الفصل الثالث

الحساب الشعاعي

1.3. مركبات شعاع وفق أساس:

ليكن E الفضاء الشعاعي على $\mathbb{R}$

- مجموعة الأشعة $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ من الفضاء الشعاعي E مجموعة مستقلة خطيا إذا كانت كل عبارة خطية معدومة لأشعة المجموعة متمتعة بمعاملات معدومة، أي:

$$\text{من أجل } (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e}_i = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

- المجموعة $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ مولدة للفضاء الشعاعي E إذا تحقق:

$$\forall \vec{V} \in E, \exists (V_1, V_2, ..., V_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{V} = \sum_{i=1}^{n} V_i \vec{e}_i$$

- كل مجموعة أشعة $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ من الفضاء الشعاعي E مستقلة ومولدة له في آن واحد تسمى أساسا للفضاء الشعاعي E.
- كل أسس الفضاء الشعاعي E تحتوي على نفس عدد الأشعة وهذا العدد يسمى بعد الفضاء الشعاعي، ونكتب $\dim E = n$ أو E_n.
- عبارة أي شعاع $(\vec{V} \in E_n)$ $\vec{V}$ وفق الأساس $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ تكتب على الشكل التالي:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} V_i \vec{e}_i = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + ... + V_n \vec{e}_n$$

تسمى السلميات الوحيدة $V_1, V_2, ..., V_n$ إحداثيات الشعاع $\vec{V}$ وفق الأساس $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

في حالة الفضاء الشعاعي ذو ثلاثة أبعاد $n = 3$، تكون عبارة أي شعاع وفق الأساس $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ على الشكل التالي:

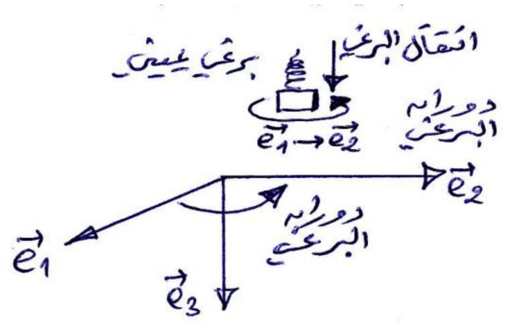
$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$$

- في المجال التطبيقي يكون من الأفضل اختيار أشعة الأساس متعامدة و متجانسة(مربعة)

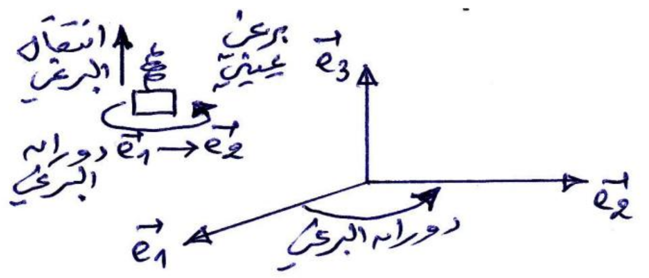
الأساس متعامد: $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$

الأساس متجانس: $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

هناك نوعان من الأسس مباشر و غير مباشر، و يمكن تمثيلها هندسيا في الشكلين التاليين.



أساس غير مباشر $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$



أساس مباشر $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

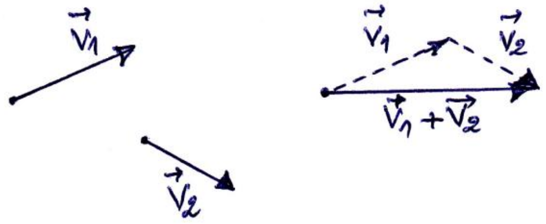
ملاحظة: إذا أعطي في الفضاء نظام يميني لإحداثيات كارتيزية مربعة (متعامد و متجانس) فإن أشعة الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ الموجهة للمحاور Ox, Oy, Oz على الترتيب تكون جملة أشعة أساس ملائمة (أنظر الفقرة4.3).

- عبارة أي شعاع وفق الأساس $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

حيث: V_x ، V_y، V_z إحداثيات الشعاع $\vec{V}$ وفق الأساس $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

2.3. العمليات على الأشعة:

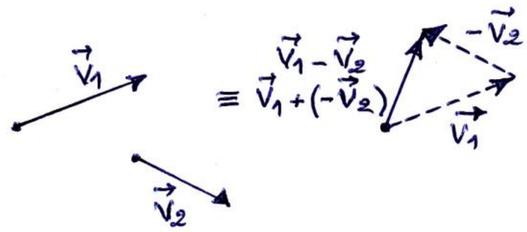


1.2.3. الجمع الشعاعي(المجموع الهندسي):

يمثل مجموع شعاعين هندسيا(الشكل)

- الجمع الشعاعي تبادلي الخاصية: $\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{V}_2+\vec{V}_1$
- الجمع الشعاعي تجميعي: $\vec{V}_1+(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=(\vec{V}_1+\vec{V}_2)+\vec{V}_3=(\vec{V}_1+\vec{V}_3)+\vec{V}_2$

2.2.3. الطرح الشعاعي:



يمثل طرح شعاعين هندسيا(الشكل)

- الطرح غير تبادلي: $\vec{V}_1-\vec{V}_2\neq\vec{V}_2-\vec{V}_1$

3.2.3. جداء شعاع ومقدار سلمي:

يعرف جداء شعاع $\vec{V}$ في عدد سلمي m $(m\in\mathbb{R})$ على أنه شعاع $\vec{W}$ (يكتب $\vec{W}=m\vec{V}$) له الخصائص التالية:

- الطويلة: $|\vec{W}|=|m||\vec{V}|$
- نفس منحنى $\vec{V}$
- نفس اتجاه $\vec{V}$ إذا كان $m\rangle 0$
- اتجاه معاكس إلى $\vec{V}$ إذا كان $m\langle 0$
- الجداء التبادلي: $m\vec{V}=\vec{V}m$
- الجداء تجميعي: $m(n\vec{V})=(mn)\vec{V}$
- الجداء توزيعي بالنسبة لجمع الأشعة: $m(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=m\vec{V}_1+m\vec{V}_2$

4.2.3. الجداء السلمي:

نعرف الجداء السلمي لشعاعين بربط كل زوج شعاعين $\vec{V}$ و $\vec{W}$ بعدد حقيقي

$$E_3\to\mathbb{R}$$
$$\vec{V},\vec{W}\to\vec{V}.\vec{W}$$

و يرمز له بالعبارة $\vec{V}\,\vec{W}$ و يقرأ $\vec{V}$ سلميا $\vec{W}$ $(\vec{V}\,scalaire\,\vec{W})$

❖ العبارة التحليلية:

لتكن عبارتا الشعاعين $\vec{V}$ و $\vec{W}$ وفق الأساس $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$

$$\vec{V}=V_1\vec{e}_1+V_2\vec{e}_2+\dots+V_n\vec{e}_n$$
$$\vec{W}=W_1\vec{e}_1+W_2\vec{e}_2+\dots+W_n\vec{e}_n$$

عبارة الجداء السلمي:

$$\vec{V}.\vec{W}=(\sum_{i=1}^{n}V_i\vec{e}_i)(\sum_{j=1}^{n}W_j\vec{e}_j)=\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n}V_iW_j(\vec{e}_i.\vec{e}_j)$$

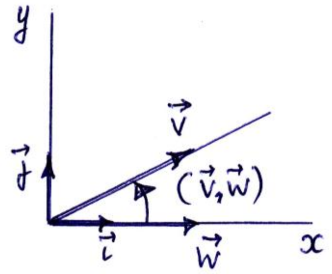
في حالة الأساس $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ متعامد و متجانس

$$\vec{e}_i.\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

في حالة فضاء شعاعي ثلاثي البعد $n=3$ و ليكن أساسه $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$$\vec{V}.\vec{W}=V_xW_x+V_yW_y+V_zW_z$$

❖ <u>التمثيل الهندسي:</u>



في معلم فضائي $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (انظر الفقرة)

ليكن $\vec{W}\,//\,\vec{i}$ و $\vec{V}\in(xOy)$

عبارات $\vec{V}$ و $\vec{W}$

$$\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j} \quad ، \quad \vec{W}=W_x\vec{i}$$

$$\vec{V}.\vec{W}=V_xW_x$$

حيث:

$$W_x=\left|\vec{W}\right| \quad ، \quad V_x=\left|\vec{V}\right|\cos(\vec{V},\vec{W})$$

و نخلص إلى أن الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{W}$ هو العدد المساوي إلى جداء إلى طويلتي هذين الشعاعين و تجب الزاوية $(\vec{V},\vec{W})$ التي يكونانها

$$\vec{V}.\vec{W}=\left|\vec{V}\right|\left|\vec{W}\right|\cos(\vec{V},\vec{W})$$

❖ <u>خصائص الجداء السلمي:</u>

- الجداء السلمي تبادلي الخاصية: $\vec{V}_1.\vec{V}_2=\vec{V}_2.\vec{V}_1$
- الجداء السلمي يمتلك الخاصية التوزيعية بالنسبة لجمع الأشعة: $\vec{V}_1.(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=\vec{V}_1.\vec{V}_2+\vec{V}_1.\vec{V}_3$
- $\vec{V}_1.\vec{V}_2>0 \Leftrightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2)<\pi/2$

  $\vec{V}_1.\vec{V}_2<0 \Leftrightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2)>\pi/2$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(\vec{V}_1,\vec{V}_2)=\pi/2, \vec{V}_1\neq 0, \vec{V}_2\neq 0 \, (\vec{V}_1\perp\vec{V}_2)\\ \vec{V}_1\neq 0, \vec{V}_2=0\\ \vec{V}_1=0, \vec{V}_2\neq 0\end{cases}$$

- لدينا:

$$\vec{V}.\vec{W}=\left|\vec{V}\right|\left|\vec{W}\right|\cos(\vec{V},\vec{W})=\left|\vec{V}\right|P_{\vec{W}/\vec{V}}$$

حيث:

$$P_{\vec{W}/\vec{V}}=\left|\vec{W}\right|\cos(\vec{V},\vec{W})$$

أو:

$$P_{\vec{W}/\vec{V}}=\left|\vec{W}\right|\left|\vec{u}_{\vec{V}}\right|\cos(\vec{V},\vec{W})=\vec{W}.\vec{u}_{\vec{V}}$$

حيث: $\vec{u}_{\vec{V}}=\vec{V}/\left|\vec{V}\right|$

- لأشعة الأساس الكارتيزي المربع $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

- عبارة الجداء السلمي وفق الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (في الحقيقة لا يعتمد على الأساس)

$$\vec{V}.\vec{W} = (V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k})(W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}) = V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z$$

- عبارة طويلة أي شعاع $\vec{V}$ وفق الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (في الحقيقة لا يعتمد على الأساس)

$$\vec{V}.\vec{V} = \left|\vec{V}\right|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \Rightarrow \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

- عبارة الزاوية $(\vec{V}, \vec{W})$

$$\cos(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{\vec{V}.\vec{W}}{\left|\vec{V}\right|\left|\vec{W}\right|} = \frac{V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}$$

- يمكن كتابة عبارة الشعاع $\vec{V}$ بدلالة طويلته والزوايا التوجيهية أي الزوايا التي يكونها مع الأشعة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ على الترتيب

$$\left.\begin{aligned} \vec{i}.\vec{V} &= \left|\vec{i}\right|\left|\vec{V}\right|\cos(\vec{i}.\vec{V}) \\ \vec{i}.\vec{V} &= \vec{i}.(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}) = V_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_x = \left|\vec{V}\right|\cos(\vec{i}, \vec{V})$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{j}.\vec{V} &= \left|\vec{j}\right|\left|\vec{V}\right|\cos(\vec{j}.\vec{V}) \\ \vec{j}.\vec{V} &= \vec{j}.(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}) = V_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_y = \left|\vec{V}\right|\cos(\vec{j}, \vec{V})$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{k}.\vec{V} &= \left|\vec{k}\right|\left|\vec{V}\right|\cos(\vec{k}.\vec{V}) \\ \vec{k}.\vec{V} &= \vec{k}.(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}) = V_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_z = \left|\vec{V}\right|\cos(\vec{k}, \vec{V})$$

$$\vec{V} = \left|\vec{V}\right|\cos(\vec{i}, \vec{V})\vec{i} + \left|\vec{V}\right|\cos(\vec{j}, \vec{V})\vec{j} + \left|\vec{V}\right|\cos(\vec{k}, \vec{V})\vec{k}$$

<u>نتيجة:</u> إحداثيات الشعاع $\vec{V}$ وفق الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي مسا قطه على المحاور Ox ، Oy و Oz على الترتيب لمعلم متعامد و متجانس $Oxyz$.

ويمكن استنتاج:

$$\cos^2(\vec{i}, \vec{V}) + \cos^2(\vec{j}, \vec{V}) + \cos^2(\vec{k}, \vec{V}) = 1$$

<u>حالة خاصة:</u> لشعاع وحدة $\left|\vec{u}\right| = 1$ ، $\vec{u} = \cos(\vec{i}, \vec{u})\vec{i} + \cos(\vec{j}, \vec{u})\vec{j} + \cos(\vec{k}, \vec{u})\vec{k}$

5.2.3. الجداء الشعاعي:

نعرف الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بربط كل زوج شعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بشعاع $\vec{W}$

$$E_3 \to E_3$$
$$\vec{U}, \vec{V} \to \vec{W}$$

و يرمز له بالعبارة $\vec{U} \wedge \vec{V}$ و يقرأ $\vec{U}$ شعاعيا $\vec{V}$ $(\vec{U}\, vectoriel\, \vec{V})$

❖ العبارة التحليلية:

لتكن عبارتا الشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ وفق الأساس $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ المتعامد و المتجانس

$$\vec{U} = U_1\vec{e}_1 + U_2\vec{e}_2 + U_3\vec{e}_3 \quad ، \quad \vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3$$

عبارة الجداء الشعاعي وفق الأساس $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{W} = (U_2V_3 - U_3V_2)\vec{e}_1 + (U_3V_1 - U_1V_3)\vec{e}_2 + (U_1V_2 - U_2V_1)\vec{e}_3$$

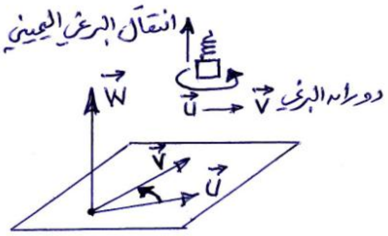
يمكن التعبير عن الجداء الشعاعي باستعمال مفهوم المحدد:

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

في حالة الأساس الكارتيزي $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (U_yV_z - U_zV_y)\vec{i} + (U_zV_x - U_xV_z)\vec{j} + (U_xV_y - U_yV_x)\vec{k}$$

❖ التمثيل الهندسي:



لحاصل الجداء الشعاعي الشعاع $\vec{W}$ الخصائص التالية:

- $|\vec{W}| = |\vec{U}||\vec{V}|\sin(\vec{U}, \vec{V})$، حيث $(\vec{U}, \vec{V})$ الزاوية المحصورة بين $\vec{U}$ و $\vec{V}$.
- $\vec{W}$ عمودي على المستوي المكون بالأشعة $\vec{U}$ و $\vec{V}$ ($\vec{W} \perp \vec{U}$، $\vec{W} \perp \vec{V}$).
- يتجه بحيث تكون الأشعة الثلاثة $\vec{U}$، $\vec{V}$، $\vec{W}$ على الترتيب أساسا مباشرا.

❖ خصائص الجداء الشعاعي:

- الجداء الشعاعي غير تبادلي الخاصية: $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- الجداء الشعاعي يمتلك الخاصية التوزيعية بالنسبة لجمع الأشعة: $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$
-

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0, \vec{V}_1 \neq \vec{0}, \vec{V}_2 \neq \vec{0} (\vec{V}_1 // \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \pi, \vec{V}_1 \neq \vec{0}, \vec{V}_2 \neq \vec{0} (\vec{V}_1 // \vec{V}_2) \\ \vec{V}_1 \neq \vec{0}, \vec{V}_2 = \vec{0} \\ \vec{V}_1 = \vec{0}, \vec{V}_2 \neq \vec{0} \end{cases}$$

- لأشعة الأساس الكارتيزي $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لمعلم متجانس ومتعامد $Oxyz$:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \quad ، \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i} \quad ، \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

3.3. تفاضل وتكامل الدوال الشعاعية:

1.3.3. مشتقات الدوال الشعاعية:

❖ لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ تابع لمتغير عددي t، و عبارتها وفق الأساس المتعامد و المتجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

- للدالة $\vec{V}(t)$ نهاية لما $t \to t_0$ إذا و فقط إذا كانت لكل دالة $V_x(t)$ ، $V_y(t)$ و $V_z(t)$ نهاية لما $t \to t_0$

$$\lim_{t\to t_0} \vec{V}(t) = \lim_{t\to t_0} V_x(t)\vec{i} + \lim_{t\to t_0} V_y(t)\vec{j} + \lim_{t\to t_0} V_z(t)\vec{k} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

- الدالة $\vec{V}(t)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق إذا كانت إحداثياتها $V_x(t)$، $V_y(t)$و $V_z(t)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق أيضا باعتبارها دوال عددية.
- مشتق الدالة $\vec{V}(t)$ إذا كانت الأشعة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ لا تعتمد على t

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{V_x(t+\Delta t) - V_x(t)}{\Delta t}\right]\vec{i} + \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{V_y(t+\Delta t) - V_y(t)}{\Delta t}\right]\vec{j} + \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{V_z(t+\Delta t) - V_z(t)}{\Delta t}\right]\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

$\frac{d\vec{V}}{dt}$ يسمى الشعاع المشتق للدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$.

- المشتق الثاني للدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ بالنسبة للمتغير t

$$\frac{d^2\vec{V}}{dt^2} = \frac{d^2V_x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2V_y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2V_z}{dt^2}\vec{k}$$

❖ لتكن الدوال الشعاعية $\vec{U}(t)$، $\vec{V}(t)$و $\vec{W}(t)$ توابع للمتغير العددي t

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{V}\right] = \frac{df}{dt}\vec{V} + f(t)\frac{d\vec{V}}{dt}$$ ، $f(t)$. دالة عددية للمتغير t

$$\frac{d}{dt}(\vec{U} + \vec{V} - \vec{W}) = \frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{d\vec{W}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{U}.\vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt}.\vec{V} + \vec{U}.\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}[\varphi(t)]) = \frac{d\vec{V}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$ ، $\varphi(t)$. دالة عددية للمتغير t

2.3.3. المشتقات الجزئية للدوال الشعاعية:

❖ لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(x,y,z)$ تابع لمجموعة من المتغيرات العددية x ، y و z ($\vec{V}$تعتمد على وضعية النقطة في الفضاء $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)

$$\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\vec{i} + V_y(x,y,z)\vec{j} + V_z(x,y,z)\vec{k}$$

- مشتق $\vec{V}(x,y,z)$ بالنسبة للمتغير x يسمى المشتق الجزئي للدالة الشعاعية $\vec{V}$ بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{V}(x+\Delta x, y, z) - \vec{V}(x,y,z)}{\Delta x} =$$

$$= \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_x(x+\Delta x, y, z) - V_x(x,y,z)}{\Delta x}\right]\vec{i} + \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_y(x+\Delta x, y, z) - V_y(x,y,z)}{\Delta x}\right]\vec{j} + \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_z(x+\Delta x, y, z) - V_z(x,y,z)}{\Delta x}\right]\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\vec{k}$$

حيث الأشعة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ لا تعتمد على المتغيرات x، y و z.

ملاحظة:

- ✓ عند الاشتقاق بالنسبة إلى المتغير x نفرض أن المتغيرين y و z ثابتان.
- ✓ ما تم تناوله ينطبق على المشتقات الجزئية $\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}$، $\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$.

❖ لتكن الدوال الشعاعية $\vec{U}$، $\vec{V}$ و $\vec{W}$ توابع للمتغيرات العددية x، y و z

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U} + \vec{V} - \vec{W}) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{W}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}.\vec{V}) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}.\vec{V} + \vec{U}.\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}$$

- في حالة $y(x)$، $z(x)$

المشتق الكلي للدالة الشعاعية $\vec{V}$ بالنسبة إلى x

$$\frac{d\vec{V}}{dx} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

- في حالة $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$

مشتق الدالة الشعاعية $\vec{V}$ بالنسبة إلى المتغير t

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

3.3.3. تفاضل الدوال الشعاعية:

❖ لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\vec{i} + V_y(x,y,z)\vec{j} + V_z(x,y,z)\vec{k}$

تفاضل الدالة الشعاعية $\vec{V}$

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}dz$$

❖ لتكن الدوال الشعاعية $\vec{U}$، $\vec{V}$

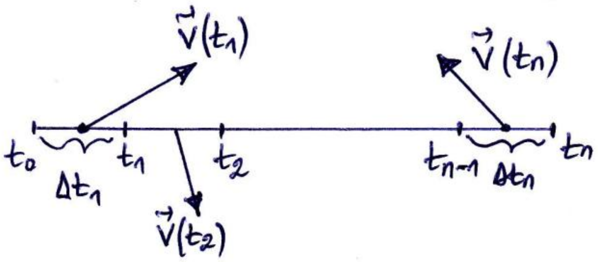
$$d(\vec{U} + \vec{V}) = d\vec{U} + d\vec{V}$$

$$d(\vec{U}.\vec{V}) = d\vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.d\vec{V}$$

$$d(\vec{U} \wedge \vec{V}) = d\vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge d\vec{V}$$

4.3.3. تكامل الدوال الشعاعية:

❖ لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$



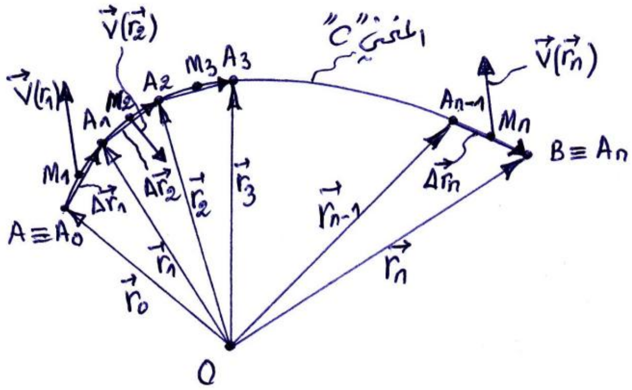
يعرف تكامل الدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ بالنهاية التالية إذا وجدت

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \vec{V}(t_i)\Delta t_i$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t)dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} V_x(t)dt\right]\vec{i} + \left[\int_{t_1}^{t_2} V_y(t)dt\right]\vec{j} + \left[\int_{t_1}^{t_2} V_z(t)dt\right]\vec{k}$$

❖ لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(M) \equiv \vec{V}(\vec{r}) \equiv \vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\vec{i} + V_y(x,y,z)\vec{j} + V_z(x,y,z)\vec{k}$

يعرف التكامل المنحني(الخطي) للدالة الشعاعية $\vec{V}$ على المنحني" C" المعرف بين النقطتين A و B بالنهاية التالية إذا وجدت



$$\int_{A}^{B} \vec{V}(\vec{r})d\vec{r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \vec{V}(\vec{r}_i)\Delta\vec{r}_i$$

حيث: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. شعاع موضع نقطة ما M من المنحني" C" و هي نقطة تأثير الشعاع $\vec{V}$.

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. شعاع الإنتقال (أو تفاضل الشعاع $\vec{r}$) على المنحني" C" في النقطة M.

$$\int_{A}^{B} \vec{V}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{A}^{B} V_x(x,y,z)dx + V_y(x,y,z)dy + V_z(x,y,z)dz$$

- إذا كانت المعادلات الوسيطية معروفة $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ فيمكن إجراء التكامل الخطي بالنسبة إلى المتغير t

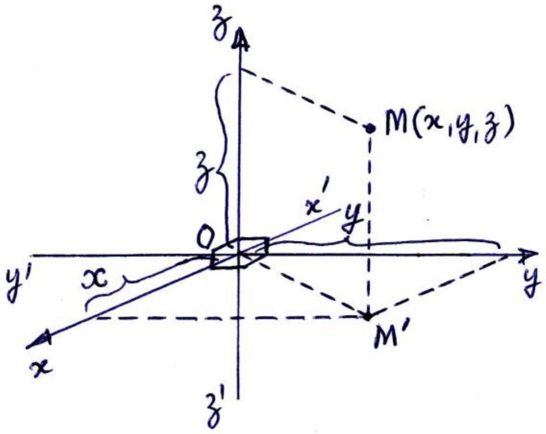
$$\int_{A}^{B} \vec{V}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{A}^{B} V_x(x,y,z)\frac{dx}{dt} + V_y(x,y,z)\frac{dy}{dt} + V_z(x,y,z)\frac{dz}{dt}$$

❖ بعض الخصائص للتكامل الخطي

- $\int_{ABC} \vec{V}.d\vec{r} = \int_{AB} \vec{V}.d\vec{r} + \int_{BC} \vec{V}.d\vec{r}$
- $\int_{AB} \vec{V}.d\vec{r} = -\int_{BA} \vec{V}.d\vec{r}$
- $\int_{AB} (\vec{U}+\vec{V}).d\vec{r} = \int_{AB} \vec{U}.d\vec{r} + \int_{AB} \vec{V}.d\vec{r}$
- $\int_{AB} C\vec{V}.d\vec{r} = C\int_{AB} \vec{U}.d\vec{r}$

4.3. جمل الإحداثيات:

يمكن لمراقب تحديد موضع نقطة M من فضاء إقليدي ثلاثي الأبعاد باستعمال أدوات رياضية تسمى نظم إحداثيات أهمها من الناحية التطبيقية:

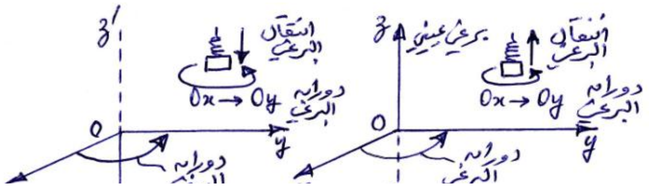


1.4.3. النظام الكارتيزي المربع للإحداثيات :

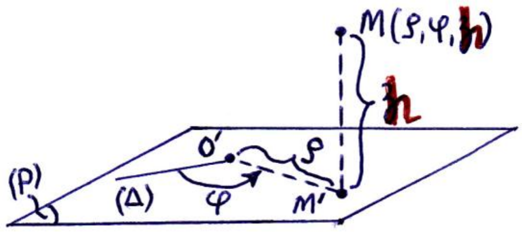
يختار في الفضاء ثلاثي الأبعاد ثلاثة مستقيمات موجهة(محاور) $x'Ox$ ، $y'Oy$ و $z'Oz$ متعامدة و متقاطعة في نقطة مختارة "O" مبدأ النظام.

يحدد موضع نقطة M من الفضاء بالمسافات الموجهة x ، y و z عن المستويات Oyz ، Oxz و Oxy على التوالي وتسمى الإحداثيات الكارتيزية المربعة للنقطة M ونكتب: $M\ (x, y, z)$ ، حيث x ، y و z أعداد حقيقية.

هناك نوعان من هذا النظام: مباشر و غير مباشر (يميني ويساري).

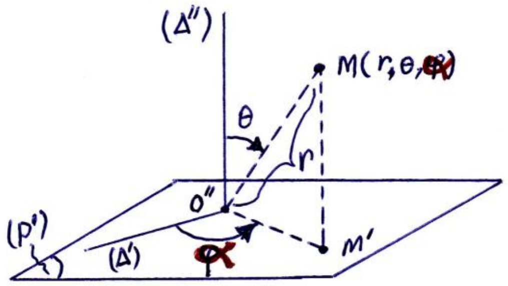


2.4.3. النظام الأسطواني للإحداثيات:



يختار مستوى(P)، نقطة منه "O’" مبدأ النظام ومستقيم (Δ) مار بالنقطة "O’" ومحتوى في المستوى(P). يحدد موضع نقطة M من الفضاء بالمسافة ρ بين النقطة "O’" والنقطة M’ وبالزاوية $\varphi \equiv (\Delta, O'M')$ حيث M' مسقط M على المستوي (P) وبالمسافة الموجهة h عن المستوى (P) وتسمى الإحداثيات الأسطوانية للنقطة M. نكتب: $M\ (\rho, \varphi, h)$, حيث ρ ، φ و h : أعداد حقيقية و $\rho \geq 0$.

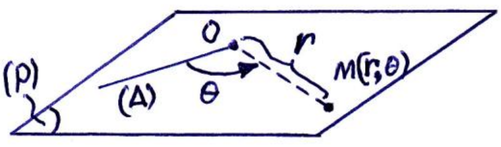
3.4.3. النظام الكروي للإحداثيات:



يختار مستوى (P')، نقطة منه "O’’" مبدأ النظام ومستقيمان (Δ') و (Δ'') ماران بالنقطة "O’’" الأول محتوى في المستوى (P') والثاني عمودي عليه. يحدد موضع النقطة M من الفضاء بالمسافة r عن النقطة "O’’" وبالزاوية $\theta \equiv (\Delta'', O''M)$ وبالزاوية $\alpha \equiv (\Delta', O''M')$ حيث M' مسقط M على (P') وتسمى الإحداثيات الكروية للنقطة M.

نكتب $M\ (r, \theta, \alpha)$ ، حيث r, θ, α أعداد حقيقية ، $r \geq 0$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

4.4.3. النظام القطبي للإحداثيات:



لتحديد موضع نقطة M في مستوي (P) نختار نقطة "O" من هذا المستوي مبدأ النظام (القطب) ومستقيم (Δ) مار بالنقطة "O" ومحتوى في المستوي(P).

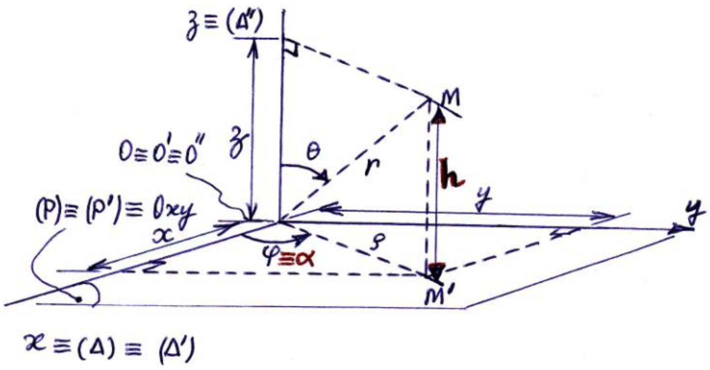
يحدد موضع النقطة M في المستوي بالمسافة r بين النقطة "O" والنقطة M وبالزاوية $\theta = (\Delta, OM)$ وتسمى الإحداثيات القطبية للنقطة M.

نكتب: $M\ (r, \theta)$ ، حيث r ، θ أعداد حقيقية و $r \geq 0$.

5.4.3. علاقات التحويل (الانتقال) بين النظام الكارتيزي المربع والنظامين الأسطواني والكروي للإحداثيات:

باختيار الوضعية النسبية لمختلف المبادئ ولمختلف المستويات والمحاور يمكن كتابة العلاقات الرابطة بين مختلف الأنظمة.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

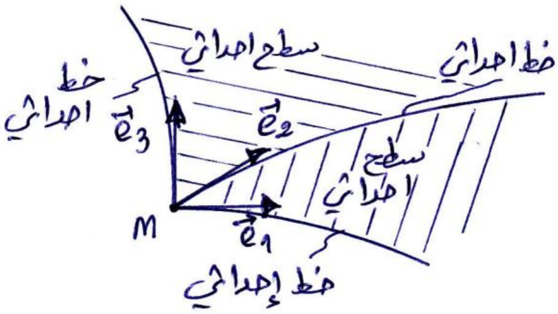


$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

6.4.3. بعض الإحداثيات المنحنية لشعاع:

يمكن تحليل أي شعاع $\vec{V}$ من فضاء شعاعي ثلاثي الأبعاد بثلاثة أشعة مستقلة خطيا $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$، بمعنى ممثل على شكل عبارة خطية: $\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3$

حيث : V_1, V_2, V_3 تسمى إحداثيات الشعاع $\vec{V}$ وفق الأساس المعرف بالأشعة $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

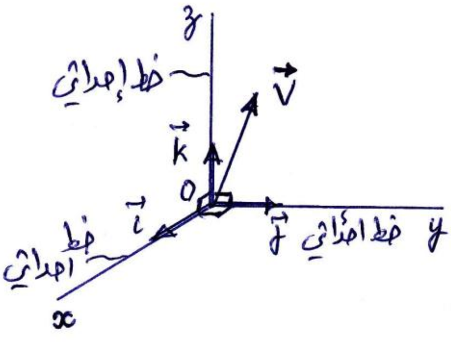


لتحليل الأشعة، المعرفة في نقطة ما من الفضاء،
عادة يختار أساس مرتبط بنظام الإحداثيات المستعمل.
يحلل الشعاع بأشعة الأساس الموضعي (المحلي)،
التي توجه بالخطوط الإحداثية للنظام المنحني للإحداثيات
المستعمل في كل نقطة و تكون مماسية لها أو عمودية على السطوح الإحداثية.
أطوال و اتجاهات أشعة الأساس الموضعي، بصفة عامة،
متغيرة من نقطة إلى أخرى. نتناول ثلاثة أسس مهمة من الناحية التطبيقية "
أشعتها متعامدة و أطوالها مساوية إلى الوحدة. و بالتالي فالخطوط الإحداثية متعامدة قي كل نقطة، و كل خط إحداثي عمودي على كل السطوح الإحداثية ذات القيم الثابتة. يحلل الشعاع إلى مركباته المتعامدة المتجانسة.

❖ الإحداثيات الكارتيزية المربعة لشعاع:

إذا أعطي في الفضاء نظام يميني لإحداثيات كارتيزية مربعة فإن أشعة الواحدة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ الموجهة للمحاور Ox، Oy وOz على الترتيب تكون جملة أشعة أساس ملائمة.

يحلل أي شعاع $\vec{V}$ في الأساس الموضعي $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:



$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

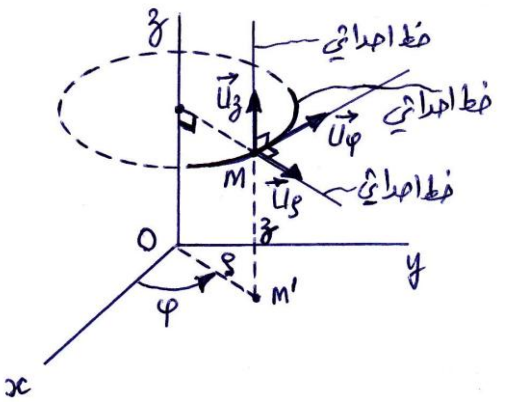
حيث: V_x ، V_y وV_z تسمى الإحداثيات الكارتيزية المربعة للشعاع $\vec{V}$.

وتحلل أية دالة شعاعية في هذا الأساس على الشكل:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$$

❖ **الإحداثيات الأسطوانية لشعاع:**

جملة الأشعة المتعامدة و الواحدة و الموجهة بالخطوط الإحداثية للنظام الأسطواني للإحداثيات و تكون مماسية لها تكون أساسا موضعيا في كل نقطة.



يحلل أي شعاع $\vec{V}$ في الأساس الموضعي $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$

للنظام الأسطواني للإحداثيات على الشكل :

$$\vec{V} = V_\rho \vec{u}_\rho + V_\varphi \vec{u}_\varphi + V_z \vec{u}_z$$

V_ρ ،V_φ وV_z تسمى الإحداثيات الأسطوانية للشعاع $\vec{V}$.

وتحلل أية دالة شعاعية في هذا الأساس على الشكل:

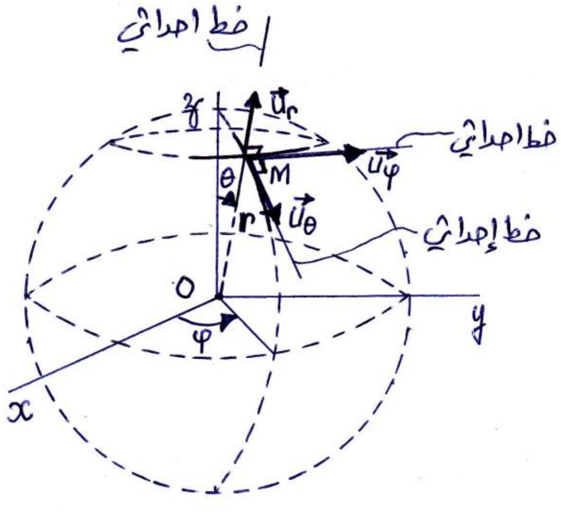
$$\vec{F}(\rho, \varphi, z) = F_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{u}_\rho + F_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{u}_\varphi + F_z(\rho, \varphi, z)\vec{u}_z$$

العلاقة بين الأساس الكارتيزي $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ والأساس الأسطواني $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

❖ **الإحداثيات الكروية لشعاع:**

جملة الأشعة المتعامدة والواحدة والموجهة بالخطوط الإحداثية للنظام الكروي للإحداثيات وتكون مماسية لها تكون أساسا موضعيا في كل نقطة.



يحلل أي شعاع $\vec{V}$ في الأساس الموضعي $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

للنظام الكروي للإحداثيات على الشكل:

$$\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta + V_\varphi \vec{u}_\varphi$$

V_r ،V_θ وV_φ تسمى الاحداثيات الكروية للشعاع $\vec{V}$.

وتحلل أية دالة شعاعية في هذا الأساس على الشكل:

$$\vec{F}(r, \theta, \varphi) = F_r(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + F_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + F_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi$$

العلاقة بين الأساس الكارتيزي $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ والأساس الكروي $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \end{cases}$$

ملاحظة حول أبعاد المقادير الفيزيائية: إذا كان المقدار الفيزيائي يوصف بدالة شعاعية، فإن بعده الفيزيائي يعطى بإحداثياته و لا يعطى بأشعة الأساس. و بذلك نعتبر هذه الأخيرة مقادير بدون بعد و يمكن إستعمالها كجملة أساس عامة لمختلف أصناف الأشعة، التي لها أبعاد فيزيائية مختلفة (على سبيل المثال، الإنتقال، السرعة، القوة،...).